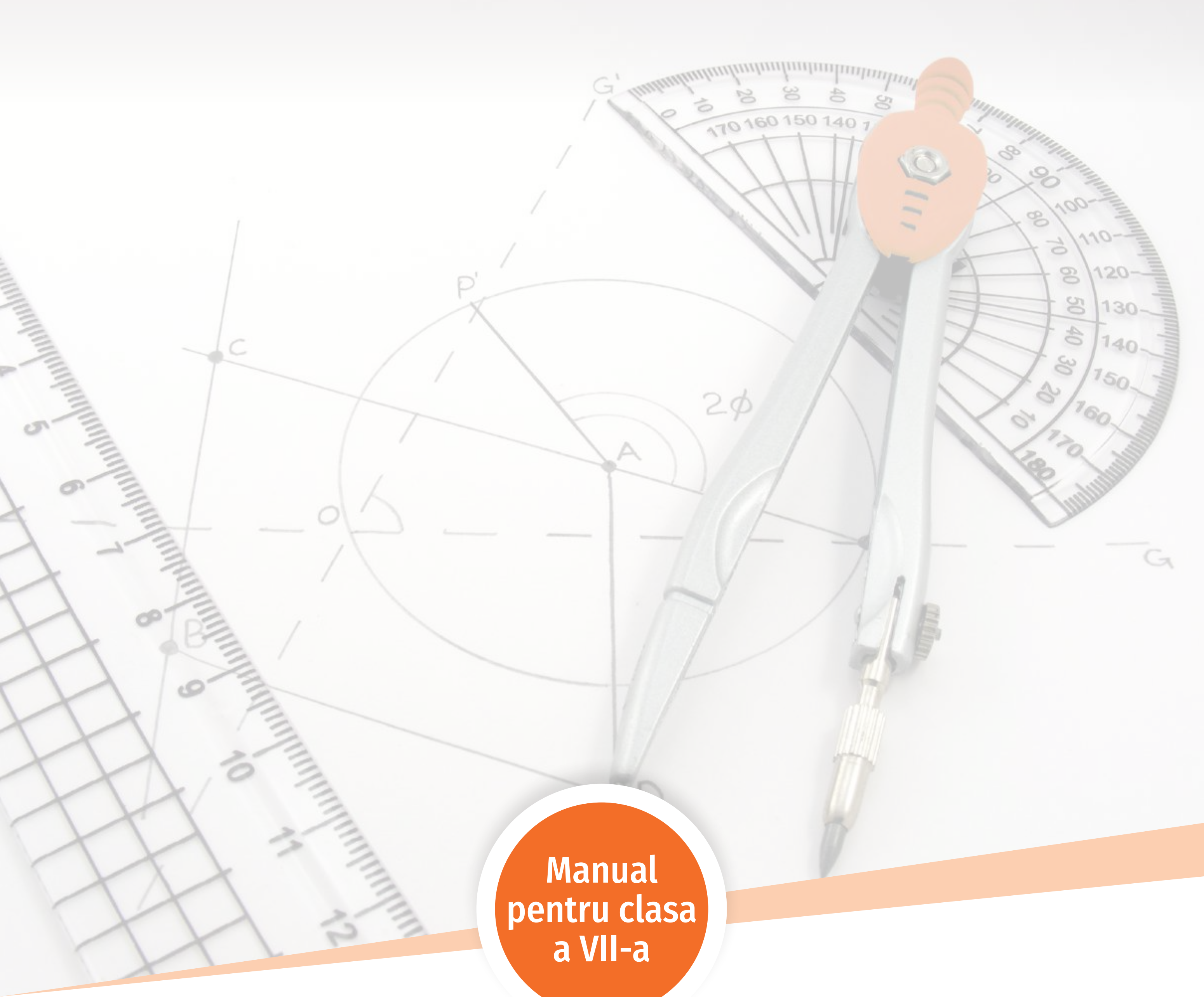
Ministerul Educației



Manual pentru clasa a VII-a

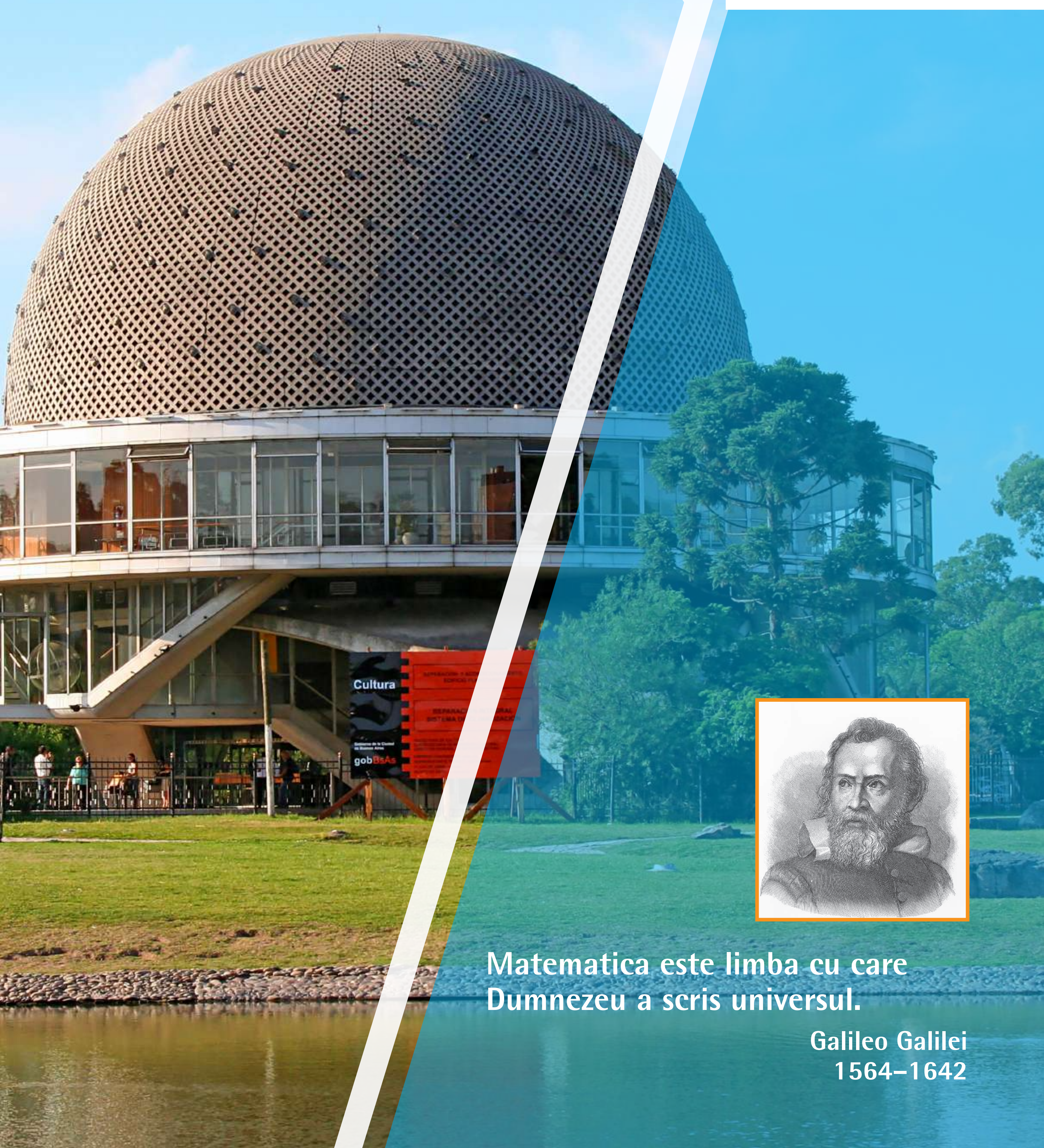
# Matematică

Radu Gologan (coordonator)
Camelia Neța • Ciprian Neța • Elisabeta Ana Naghi

CORINT LOGISTIC

# CUPRINS

# ALGEBRĂ



Matematica este limba cu care
Dumnezeu a scris universul.

Galileo Galilei
1564–1642

# MULȚIMEA NUMERELOR REALE

# 1

## Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural

**ACTIVITATE PRACTICĂ**

Vreți să postați pe facebook o poză de formă pătrată, cu rezoluția de 3600 de pixeli, într-o fereastră dreptunghiulară (70 x 75 pixeli). Verificați dacă poza se încadrează în acest spațiu.

*Indicație*. Poza are formă pătrată, cu o arie ce corespunde la 3600 de pixeli. Știind că aria pătratului este $A = a^2$, adică $3600 = 60^2$, se obține că latura pătratului este de 60 de pixeli, deci poza încape în spațiul ales.

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

➢ Copiați în caiete tabelul următor și completați-l după model:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **a** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| **$a^2$** | **1** | **4** | **9** | **16** | **25** | | | | | |
| **a** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** |
| **$a^2$** | | | | | | | | **324** | | |
| **a** | **21** | **22** | **23** | **24** | **25** | **26** | **27** | **28** | **29** | **30** |
| **$a^2$** | | | | | | | | | | |
| **a** | **35** | **40** | **45** | **50** | **60** | **70** | **75** | **80** | **90** | **100** |
| **$a^2$** | | | | | **3600** | | | | | |

➢ După completarea tabelului, puteți spune:

- Pătratul numărului natural 18 este 324, deoarece $18^2 = 324$.
- 3600 este pătratul numărului 60.
- 15 este acel număr natural al cărui pătrat este 225. El este singurul număr natural cu această proprietate!

**DEFINIȚIE**

*Rădăcina pătrată* a unui număr $a$, $a \geq 0$, este numărul $x$, $x \geq 0$ cu proprietatea că $x^2 = a$; cu alte cuvinte, acel număr mai mare sau egal cu 0 care, prin ridicare la puterea a doua, are ca rezultat numărul $a$.

Semnul $\sqrt{\phantom{a}}$ se numește *radical*. În cazul rădăcinii pătrate, acesta este radical de ordinul 2. Există și radicali de ordin superior lui 2.

Notație: $\sqrt{a} = x$. Citim: „rădăcina pătrată a numărului $a$ este egală cu $x$” sau „radical din $a$ este egal cu $x$”.

**OBSERVAȚIE**

Dacă privim rădăcina pătrată *în oglindă* cu ridicarea la pătrat a unui număr, tabelul anterior devine: $\sqrt{324} = 18$; $\sqrt{225} = 15$; $\sqrt{625} = 25$; $\sqrt{3600} = 60$; $\sqrt{841} = 29$.

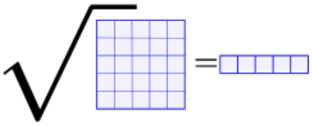
**IMPORTANT**

- Rădăcina pătrată se poate calcula numai din numere pozitive.
- $a \geq 0$ și $\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a$ și $x \geq 0$.
- $(\sqrt{a})^2 = a, \ a \geq 0$.

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

➢ $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$; $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$; $\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$; $\sqrt{256} = \sqrt{16^2} = 16$; $\sqrt{625} = \sqrt{25^2} = 25$; $\sqrt{784} = \sqrt{28^2} = 28$; $\sqrt{26^2} = 26$; $\sqrt{56^2} = 56$; $\sqrt{9^4} = \sqrt{(9^2)^2} = 9^2 = 81$; $\sqrt{7^{14}} = \sqrt{(7^7)^2} = 7^7$.

➢ Pentru ca $\sqrt{x-5}$ să existe, trebuie ca $x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$.



## ✔ SĂ ÎNVĂȚĂM!

Dacă $a \geq 0$ și $b \geq 0$, atunci $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ și $\sqrt{a:b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}, b \neq 0$.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ $\sqrt{2^2 \cdot 3^2} = 2 \cdot 3 = 6$; $\sqrt{2^4 \cdot 3^2} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3^2} = 2^2 \cdot 3 = 12$; $\sqrt{7^2 \cdot 5^2} = 7 \cdot 5 = 35$; $\sqrt{6^4 \cdot 9} = \sqrt{6^4} \cdot \sqrt{9} = 6^2 \cdot 3$; $\sqrt{81 \cdot 100} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{100} = 9 \cdot 10 = 90$; $\sqrt{36 \cdot 25} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{25} = 6 \cdot 5 = 30$; $\sqrt{144 \cdot 121} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{121} = 12 \cdot 11 = 132$; $\sqrt{5^4 \cdot 4 \cdot 3^2} = \sqrt{5^4} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{3^2} = 5^2 \cdot 2 \cdot 3 = 150$.

➢ $\sqrt{441:49} = \sqrt{441} : \sqrt{49} = 21:7 = 3$; $\sqrt{6^8:3^8} = \sqrt{6^8} : \sqrt{3^8} = 6^4:3^4 = 2^4$; $\sqrt{9^7:3^8} = \sqrt{(3^2)^7} : \sqrt{3^8} = \sqrt{3^{14}} : 3^4 = 3^7 : 3^4 = 3^3$.

## ȘTIAȚI CĂ...?

➢ Rădăcina pătrată era cunoscută încă din Antichitate. Babilonienii aveau tabele cu rădăcinile pătrate ale numerelor.

➢ În Evul Mediu s-a dezvoltat mult noțiunea de rădăcină pătrată. Hindușii cunoșteau faptul că *nu se poate extrage rădăcina pătrată dintr-un număr negativ*.

## EXERSAȚI

**1.** Copiați tabelul în caiete și completați-l:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***a*** | 256 | 361 | 484 | | $225 \cdot 361$ | $10000:625$ | | $15^{18} \cdot 7^{22}$ |
| $\sqrt{a}$ | | | | 37 | | | $7^5 \cdot 3^3$ | |
| ***a*** | 729 | 841 | 900 | | $576 \cdot 144$ | $784:49$ | | $21^{16} \cdot 4^8$ |
| $\sqrt{a}$ | | | | 17 | | | $8^3 \cdot 6^9$ | |

**2.** Scrieți toate numerele de două cifre care reprezintă pătrate de numere naturale, apoi calculați rădăcina pătrată în fiecare caz.

**3.** Calculați radicalii, apoi efectuați calculele:
$\sqrt{0} + \sqrt{1} + \sqrt{4} + \sqrt{9} - \sqrt{16}$; $\sqrt{441} - \sqrt{144} - \sqrt{9}$; $\sqrt{2500} - \sqrt{625} : \sqrt{25}$; $\dfrac{\sqrt{576} + \sqrt{676}}{10}$; $\dfrac{\sqrt{841} - \sqrt{81}}{\sqrt{4}}$.

**4.** a. Calculați: $11^2$, $111^2$, $1111^2$ și analizați rezultatele. Calculați apoi: $\sqrt{12321}$; $\sqrt{123454321}$; $\sqrt{12345678987654321}$.
b. Calculați: $101^2$, $1001^2$ și analizați rezultatele. Folosind rezultatele, calculați $\sqrt{100020001}$.

**5.** Determinați numerele naturale $a$ pentru care:
a. $\sqrt{a} = 52$; b. $\sqrt{a} = 45$; c. $\sqrt{a} = 65$; d. $\sqrt{a} = 43$.

**6.** Determinați numerele naturale $a$ pentru care:
a. $\sqrt{\overline{6a6}} \in \mathbb{N}$; b. $\sqrt{\overline{7a4}} \in \mathbb{N}$;
c. $\sqrt{\overline{5a6}} \in \mathbb{N}$; d. $\sqrt{\overline{7a9}} \in \mathbb{N}$.

**7.** Aflați valorile naturale ale lui $x$ pentru care există radicalii:
a. $\sqrt{x-5}$; b. $\sqrt{x+8}$;
c. $\sqrt{2x-8}$; d. $\sqrt{26-5x}$.

**8.** Determinați cifrele $x$ și $y$ pentru care
$\sqrt{\overline{xyx}} = \overline{xx}$.

**9.** Determinați cifrele $a$ și $b$ pentru care:
a. $\sqrt{\overline{ab}} = 6$; b. $\sqrt{\overline{1ab}} = 13$;
c. $\sqrt{\overline{62ab}} = 79$; d. $\sqrt{\overline{1a76b}} = 137$.

# Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional

## NE AMINTIM!

✓ Am aflat cum se calculează rădăcina pătrată a unui număr ce reprezintă pătratul unui număr natural.

✓ Am aflat că pentru $\sqrt{a} = x$ avem obligatoriu $a \geq 0$ și $x \geq 0$.

✓ Cunoaștem că:

$$|a| = \begin{cases} a, a > 0 \\ 0, a = 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}.$$

Pentru a calcula rădăcina pătrată a unui număr natural $a$, trebuie să răspundem la următoarea întrebare: *Există și, dacă există, care este numărul care ridicat la puterea a doua îl are ca rezultat pe a?*

**Atenție la cele două noțiuni: pătrat al unui număr natural, rădăcină pătrată!**

Verificați dacă ați înțeles cele două noțiuni, completând cu adevărat sau fals afirmațiile următoare:

- Rădăcina pătrată din pătratul unui număr natural este număr natural.
- Rădăcina pătrată a oricărui pătrat al unui număr natural este număr natural.
- Orice număr natural este rădăcină pătrată a unui număr natural.
- Este posibil ca rădăcina pătrată a unui număr să fie egală cu numărul respectiv.

Observăm că: $\sqrt{7^2} = \sqrt{49} = 7$; $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7 = |-7|$.

## ✓ SĂ ÎNVĂȚĂM!

Oricare ar fi numărul rațional $a$, $\sqrt{a^2} = |a|$.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ $\sqrt{(-1)^2} = |-1| = 1$;
$\sqrt{91^2} = |91| = 91$; $\sqrt{(-15)^2} = \sqrt{225} = 15$;
$\sqrt{(-23)^2} = |-23| = 23$; $\sqrt{25a^2} = 5|a|$; $\sqrt{36a^2b^4} = 6|a| \cdot |b^2| = 6b^2|a|$.

➢ Pentru $x > 0$, calculați: $\sqrt{x^2}$; $\sqrt{49x^2} - 7x + 1$; $\sqrt{81x^2} - 9(x-4) - 36$.

*Rezolvare.* $\sqrt{x^2} = |x| = x$; $\sqrt{49x^2} - 7x + 1 = 7|x| - 7x + 1 =$
$= 7x - 7x + 1 = 1$; $\sqrt{81x^2} - 9(x-4) - 36 = 9x - 9x + 36 - 36 = 0$.

➢ Pentru $x < 0$, aflați: $\sqrt{x^2}$; $\sqrt{9x^2} + 3x$; $\sqrt{25x^2} + 5(x-3) + 12$.

*Rezolvare.* $\sqrt{x^2} = |x| = -x$; $\sqrt{9x^2} + 3x = 3|x| + 3x = -3x + 3x = 0$;
$\sqrt{25x^2} + 5(x-3) + 12 = -5x + 5x - 15 + 12 = -3$.

➢ Verificați dacă: $\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4$, $\sqrt{10^2 - 6^2} = 10 - 6$.

*Rezolvare.* $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \neq 3 + 4$;
$\sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8 \neq 10 - 6$.

## ✓ SĂ ÎNVĂȚĂM!

În general, $\sqrt{a^2 + b^2} \neq \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$; $\sqrt{a^2 - b^2} \neq \sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}$.
Relațiile sunt adevărate cu câteva excepții. Găsiți-le!

## ȘTIAȚI CĂ...?

Extragerea rădăcinii apare descrisă în *Matematica în nouă cărți* (283 î.H.), apoi la Leonardo din Pisa (Fibonacci), în 1220, în *Practica geometricae*.

Primul care a utilizat un simbol pentru radical a fost matematicianul Luca Paccioli (1487). El reda radicalul prin R (radix – radice) și scria R2, R3, R4 pentru radicalii de ordinul 2, 3, respectiv 4.

Simbolul actual pentru radical a apărut în 1525 în lucrările lui Christoff Rudolff.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Calculați:

$\sqrt{10^2 - 8^2}$; $\sqrt{25^2 - 20^2}$; $\sqrt{12^2 + 9^2}$;
$\sqrt{25^2 + 10^2}$; $\sqrt{15^2 - 9^2}$.

*Rezolvare*. Efectuăm calculele sub radical, apoi calculăm radicalul.

➢ Calculați: $\sqrt{\frac{4}{25}}$; $\sqrt{\frac{16}{9}}$; $\sqrt{\frac{121}{289}}$; $\sqrt{\frac{169}{324}}$; $\sqrt{\left(-\frac{3}{11}\right)^2}$; $\sqrt{\frac{5^4}{7^6}}$; $\sqrt{\left(-\frac{11}{12}\right)^4}$.

*Rezolvare*. $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$; $\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$; $\sqrt{\left(-\frac{3}{11}\right)^2} = \left|-\frac{3}{11}\right| = \frac{3}{11}$.

➢ Calculați: $\sqrt{1,44}$, $\sqrt{0,0064}$, $\sqrt{9,61}$.

*Rezolvare*. $\sqrt{1,44} = \sqrt{\frac{144}{100}} = \frac{12}{10} = 1,2$; $\sqrt{0,0064} = \sqrt{\frac{64}{10000}} = \sqrt{\frac{8^2}{100^2}} =$
$= \frac{8}{100} = 0,08$.

## SĂ ÎNVĂȚĂM!

Dacă $0 \le a < b$, atunci $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Avem $\sqrt{4} = 2$ și $\sqrt{9} = 3$.
Cum putem încadra rădăcina pătrată a numerelor dintre 4 și 9 între două numere naturale?

*Rezolvare*. Cum $4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9$, atunci $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ și $\sqrt{8}$ sunt cuprinse între numerele naturale 2 și 3.

➢ Încadrați fiecare radical între câte două numere naturale consecutive: $\sqrt{13}$ și $\sqrt{3724}$

*Rezolvare*. Numărul 13 se încadrează între două pătrate de numere naturale consecutive (9 ca pătrat al lui 3, respectiv 16 ca pătrat al lui 4): $9 < 13 < 16$; putem spune că $3 < \sqrt{13} < 4$.

Pentru 3724, împărțim numărul în grupe de câte două cifre, de la dreapta spre stânga: $\sqrt{37'24}$. Prima grupă, 37, se încadrează între 36 și 49. Cum $37 > 36 = 6^2$, obținem $\sqrt{3724} > \overline{6a}$. Calculăm $61^2 = 3721$ și $62^2 = 3844$, deci $61 < \sqrt{3724} < 62$.

## IMPORTANT

✓ Pentru un *număr rațional exprimat printr-o fracție ordinară*, calculăm radicalul astfel:

$\sqrt{\left(-\frac{13}{16}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{13}{16}\right)^2} = \frac{13}{16} = \left|-\frac{13}{16}\right|$.

✓ Pentru un *număr rațional exprimat printr-o fracție zecimală*, putem să-l transformăm în fracție ordinară și apoi să calculăm rădăcina pătrată:

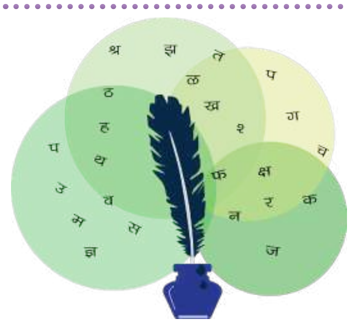
$\sqrt{0,01} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10} = 0,1$.

## ACTIVITATE ÎN PERECHI

*Formați perechi și rezolvați exercițiul următor. Verificați rezultatele cu cele ale colegului.*

Încadrați fiecare dintre următorii radicali între câte două numere naturale consecutive:

$\sqrt{6125}$ și $\sqrt{3143}$



## PROIECT

➢ Imaginează-te unul dintre matematicienii hinduși care au înțeles că nu se poate extrage rădăcina pătrată dintr-un număr negativ.

Enumeră toate ideile care te-au condus la acest adevăr matematic. Compară cu argumentele colegilor tăi!

➢ Identificați toate pătratele numerelor naturale care reprezintă ani ai secolului al XX-lea. Calculați rădăcinile pătrate ale acestora și organizați informația într-un tabel, asociind tuturor anilor identificați semnificații istorice (puteți utiliza internetul sau surse de la biblioteca școlii pentru aceasta!).

## ALGORITMUL DE CALCUL AL RĂDĂCINII PĂTRATE A PĂTRATULUI UNUI NUMĂR RAȚIONAL

Să calculăm $\sqrt{1369}$.

| | |
|---|---|
| 1. Despărțim numărul în grupe de câte două cifre, de la dreapta la stânga. | $\sqrt{13'69}$ |
| 2. Căutăm numărul cel mai mare al cărui pătrat este mai mic sau egal cu 13 (prima grupă): $3^2 < 13 < 4^2$. Scriem la rezultat 3 și scădem din 13 pe $3^2$; 3 este rezultat parțial. | $\begin{array}{r\|l} \sqrt{13'69} & 3 \\ \underline{9}\phantom{'69} & \\ 4\phantom{'69} & \end{array}$ |
| 3. Lângă primul rest parțial (4) coborâm următoarea grupă. Sub rezultat trecem dublul rezultatului parțial consemnat până la această etapă (în cazul nostru 3 este rezultatul parțial, deci consemnăm dublul său, 6). | $\begin{array}{r\|l} \sqrt{13'69} & 3 \\ \underline{9}\phantom{'69} & 6 \\ 469 & \end{array}$ |
| 4. Verificăm de câte ori se cuprinde 6 (dublul rezultatului parțial) în 46; 46:6 = 7, rest 4. Trecem 7 lângă 6 (de sub rezultat) și calculăm $67 \cdot 7 = 469$. Dacă rezultatul înmulțirii lui 67 cu 7 era mai mare decât 469, încercam o cifră mai mică ($66 \cdot 6$). | $\begin{array}{r\|l} \sqrt{13'69} & 37 \\ \underline{9}\phantom{'69} & 67 \cdot 7 = 469 \\ 469 & \\ \underline{469} & \\ 0 & \end{array}$ |
| 5. Deoarece se obține restul 0 și nu mai sunt alte grupe de coborât, algoritmul se încheie, având rezultatul extragerii rădăcinii pătrate (dintr-un pătrat al unui număr natural). | $\sqrt{1369} = 37$ |

**IMPORTANT**

Pentru fracțiile zecimale, diferența în calcularea rădăcinii pătrate este că gruparea cifrelor câte două se face atât de la virgulă spre stânga, cât și de la virgulă spre dreapta.

**! ATENȚIE**

Când ajungem în dreptul virgulei de la numărul din care se extrage rădăcina pătrată, trebuie să mutăm virgula la rezultat.

**! ATENȚIE**

Calculul rădăcinii pătrate prin algoritmul descris anterior mai este întâlnit și sub denumirea de „extragere a rădăcinii pătrate”.

**EXERSĂM ÎMPREUNĂ**

➢ Calculați: $\sqrt{21904}$; $\sqrt{43681}$; $\sqrt{1,1236}$; $\sqrt{0,9801}$.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{2'19'04} & 148 \\ \underline{1}\phantom{'19'04} & 24 \cdot 4 = 96 \\ 119\phantom{04} & 288 \cdot 8 = 2304 \\ \underline{96}\phantom{04} & \\ 2304 & \\ \underline{2304} & \\ 0 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} \sqrt{4'36'81} & 209 \\ \underline{4}\phantom{'36'81} & 40 \cdot 0 = 0 \\ =36\phantom{81} & 409 \cdot 9 = 3681 \\ \underline{0}\phantom{81} & \\ 3681 & \\ \underline{3681} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{1,12'36} & 1,06 \\ \underline{1}\phantom{,12'36} & \\ =12\phantom{36} & 20 \cdot 0 = 0 \\ \underline{0}\phantom{36} & \\ 1236 & 206 \cdot 6 = 1236 \\ \underline{1236} & \\ 0 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} \sqrt{0,98'01} & 0,99 \\ \underline{0}\phantom{,98'01} & 9 \cdot 9 = 81 \\ =98\phantom{01} & 189 \cdot 9 = 1701 \\ \underline{81}\phantom{01} & \\ 1701 & \\ \underline{1701} & \\ 0 & \end{array}$$

### ȘTIAȚI CĂ...?

În matematică și informatică, un algoritm (cuvântul are ca origine numele matematicianului persan Al-Khwarizmi) este o metodă (procedură de calcul) în care se prezintă pașii sau operațiile elementare necesare pentru rezolvarea unei probleme sau categorii de probleme.

## RĂDĂCINA PĂTRATĂ A UNUI NUMĂR CARE NU ESTE PĂTRATUL UNUI NUMĂR RAȚIONAL

Vom folosi algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate pentru a evalua $\sqrt{514}$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. Despărțim numărul în grupe de câte două cifre, de la dreapta la stânga. | $\sqrt{5'14}$ | |
| 2. Procedăm cum am învățat la extragerea rădăcinii pătrate în exemplul anterior. Am obținut restul parțial 30. Cum restul este diferit de 0, algoritmul poate continua (22 este doar un rezultat parțial sau poate fi considerat o aproximare prin lipsă). | $\sqrt{5'14}$<br>4<br>114<br>84<br>30 | 22<br>$42 \cdot 2 = 84$ |
| 3. Vom continua algoritmul și vom calcula două zecimale. Evidențiem partea zecimală a numărului 514, în acest caz completând la dreapta virgulei cu zerouri. Fiecare grupă de câte două zerouri la dreapta virgulei va permite obținerea câte unei zecimale a rădăcinii pătrate, deci pentru două zecimale avem nevoie de două grupe de câte două zerouri. Pe parcursul calculului am obținut $447 \cdot 7 = 3129 > 3000$, calcul care nu convine și calculăm $446 \cdot 6$. Putem continua să calculăm câte zecimale dorim. | $\sqrt{5'14{,}00'00}$<br>4<br>114<br>84<br>3000<br>2676<br>32400<br>31689<br>711 | 22,67<br>$42 \cdot 2 = 84$<br>~~447 · 7 = 3129~~<br>$446 \cdot 6 = 2676$<br>$4527 \cdot 7 = 31689$ |
| 4. Astfel, pentru $\sqrt{514}$ am obținut o aproximare prin lipsă la sutimi (pentru aproximare folosim semnul $\simeq$). | $\sqrt{514} \simeq 22{,}67$ | |
| 5. Probă: $514 = 22{,}67^2 + 0{,}0711$. Explicați cum, folosind datele din algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate, s-a obținut relația prin care facem proba! | | |

➢ Calculați cu aproximare prin lipsă la sutimi: $\sqrt{1{,}1904}$; $\sqrt{3{,}681}$.

| | |
|---|---|
| $\sqrt{1{,}19'04}$<br>1<br>19<br>0<br>1904<br>1881<br>23 | 1,09<br>$20 \cdot 0 = 0$<br>$209 \cdot 9 = 1881$ |

| | |
|---|---|
| $\sqrt{3{,}68'10}$<br>1<br>268<br>261<br>710<br>381<br>329 | 1,91<br>$29 \cdot 9 = 261$<br>$381 \cdot 1 = 381$ |

### ! ATENȚIE

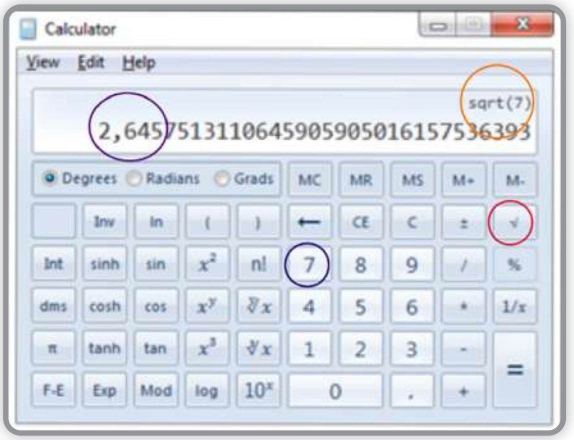
Dacă numărul de zecimale este impar, pentru ultima grupă se adaugă un 0.

## DESCOPERIȚI

Cum folosim calculatorul științific pentru a calcula valoarea, cu o aproximație oarecare, a rădăcinii pătrate dintr-un număr?

Observăm în poză, pentru $\sqrt{7}$, cum găsim valoarea aproximată prin lipsă la trei zecimale: apăsăm 7, după care apăsăm tasta $\sqrt{\ }$. Observăm numărul mare de zecimale, dar oricum și el (numărul de zecimale) este limitat de ecranul calculatorului. Cu o aproximare de trei zecimale, prin lipsă, $\sqrt{7} \simeq 2,645$.

În colțul din dreapta sus observați *sqrt(7),* care este abrevierea pentru radical (din 7 în cazul nostru) și provine de la *„square root”*.




## EXERSAȚI

**1.** Fără a calcula rădăcina pătrată, încadrați următorii radicali între câte două numere naturale consecutive: $\sqrt{8}$; $\sqrt{17}$; $\sqrt{28}$; $\sqrt{101}$; $\sqrt{180}$.

**2.** Calculați rădăcina pătrată a următoarelor numere: 361; 961; 196; 4,41; 10,24; 0,81; 841; 1444; 2116; 2209; 29,16; 0,0529; 75,69; 94,09; 1,1449; 647,1936; 9,006001; 576,4801.

Comparați între voi strategia de calcul aleasă!

**3.** Calculați: $\sqrt{1,(7)}$; $\sqrt{1,69}$; $\sqrt{1,36(1)}$; $\sqrt{1,52(1)}$.

**4.** Calculați, cu aproximare prin lipsă:
a. $\sqrt{5,3}$ (la zecimi);
b. $\sqrt{0,097}$ (la sutimi);
c. $\sqrt{12,90045}$ (la miimi).

Folosind funcția *Calculator* din aplicațiile de pe telefon, laptop sau tabletă, notați rezultatele afișate pe ecrane pentru rădăcinile pătrate ale numerelor anterioare. Discutați și explicați posibilele diferențe de afișaj.

**5.** Aflați valorile naturale ale lui $n$, pentru care:
a. $57 \le n^2 \le 100$;
b. $1475 \le n^2 \le 1700$;
c. $n^2 \le 598 \le (n+1)^2$;
d. $n^2 \le 3746 \le (n+1)^2$.

**6.** Dacă $x < 0$ și $y > 0$, exprimați fără radicali următoarele expresii:
a. $\sqrt{36x^2y^2}$; b. $\sqrt{x^4y^6}$; c. $\sqrt{\frac{64}{25}x^2y^4}$.

**7.** Aflați, în fiecare caz, cel mai mic număr întreg x pentru care există radicalii și rezultatul este număr natural:
a. $\sqrt{7+x}$; b. $\sqrt{4,5x}$; c. $\sqrt{3x-9}+\sqrt{9-3x}$;
d. $\sqrt{5x-8}$; e. $\sqrt{2x+15}$.

**8.** Aflați cel mai mic și cel mai mare număr întreg x pentru care există radicalul, în fiecare caz:
a. $17 < \sqrt{2x-1} < 20$;
b. $-4 < \sqrt{4x+3} < 0$;
c. $2 < \sqrt{5x-3} \le 7$;
d. $-1 < \sqrt{6x+18} \le 0$.

**9.** Încadrați fiecare radical între câte două numere naturale consecutive: $\sqrt{28}$, $\sqrt{79}$, $\sqrt{461}$, $\sqrt{1111}$.

**10.** Aflați numerele întregi x pentru care:
a. $8 \le \sqrt{1-2x} < 12$;
b. $21 < \sqrt{x+2} < 32$;
c. $14 \le \sqrt{(3x-1)^2} \le 20$.

# Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➤ a. Calculați $\sqrt{441}$ și $\sqrt{676}$.

b. Exprimați $\sqrt{12}$ și, respectiv, $\sqrt{72}$ ca un produs dintre un număr natural diferit de 1 și un radical.

*Rezolvare.* a. $\sqrt{441} = \sqrt{3^2 \cdot 7^2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{7^2} = 3 \cdot 7 = 21$; observăm că, dintre cei doi factori 3, respectiv dintre cei doi factori 7 din descompunere, scoatem câte unul de sub radical.

Procedând în același fel: $\sqrt{676} = \sqrt{2^2 \cdot 13^2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{13^2} = 2 \cdot 13 = 26$.

b. În descompunerea lui 12, factorul 3 apare o singură dată. Cum nu are un „factor pereche”, acesta rămâne sub radical, iar $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2 \cdot \sqrt{3}$. Spunem că *am scos factorul 2 de sub radical* și scriem $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ (*între 2 și* $\sqrt{3}$ *avem operația de înmulțire*).
$\sqrt{72} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2} = 2 \cdot \sqrt{3^2 \cdot 2} = 2\sqrt{18}$ (spunem că *am scos 2 de sub radical*) sau $\sqrt{72} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ (spunem că *am scos 6 de sub radical*).

➤ Descompuneți în produs de factori primi numerele de sub radical, apoi scoateți factorii de sub radical: $\sqrt{225}$; $\sqrt{400}$; $\sqrt{24}$.

*Rezolvare.* $\sqrt{225} = \sqrt{5^2 \cdot 3^2} = 5 \cdot 3 = 15$; $\sqrt{400} = \sqrt{2^4 \cdot 5^2} = 2^2 \cdot 5 = 20$; $\sqrt{24} = \sqrt{2^3 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3} = 2\sqrt{6}$ (*în acest caz am scos factorul 2 de sub radical*).

## NE AMINTIM!

Descompunerile în factori primi ale numerelor 441, 676, 12 și 72 sunt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 441 | 3 | 676 | 2 |
| 147 | 3 | 338 | 2 |
| 49 | 7 | 169 | 13 |
| 7 | 7 | 13 | 13 |
| 1 | | 1 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 72 | 2 | 12 | 2 |
| 36 | 2 | 6 | 2 |
| 18 | 3 | 3 | 3 |
| 6 | 3 | 1 | |
| 2 | 2 | | |
| 1 | | | |

## IMPORTANT

O metodă de calcul a rădăcinii pătrate a unui număr natural este descompunerea în factori. Dacă, după descompunerea numărului în factori primi diferiți, toți factorii au puteri pare, rădăcina sa pătrată este un număr natural.

## SĂ ÎNVĂȚĂM!

❖ Pentru $a \geq 0$ și $b \geq 0$, $\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$.

❖ Pentru $a \geq 0$ și $b \geq 0$, $\sqrt{a^{2n+1} \cdot b} = a^n\sqrt{a \cdot b}$, $n$ număr natural.

❖ Pentru $b \geq 0$, $\sqrt{a^{2n} \cdot b} = |a^n|\sqrt{b}$, $n$ număr natural nenul.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➤ Introduceți sub radical factorii din fața acestuia: $4\sqrt{5}$; $6\sqrt{14}$; $-5\sqrt{5}$; 42.

*Rezolvare.* $4\sqrt{5} = \sqrt{4^2 \cdot 5} = \sqrt{80}$; $6\sqrt{14} = \sqrt{6^2 \cdot 14} = \sqrt{504}$; $-5\sqrt{5}$ este negativ și rezultatul trebuie să rămână tot negativ, așadar $-5\sqrt{5} = -\sqrt{5^2 \cdot 5} = -\sqrt{125}$; $42 = \sqrt{42^2} = \sqrt{1764}$.

## ATENȚIE

Pentru $a\sqrt{b}$, $a \neq 0$, $b \geq 0$, dorim să introducem sub radical factorul din față, dar nu știm dacă $a$ este număr pozitiv sau negativ. Analizăm cazurile: dacă $a < 0$, atunci $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 \cdot b}$ și rezultatul este negativ. Dacă $a > 0$, atunci $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$ și rezultatul este pozitiv.

## ACTIVITATE ÎN PERECHI

*Formați perechi și rezolvați exercițiile următoare. Verificați rezultatele cu cele ale colegului și trageți concluzii.*

1. Scoateți factorii de sub radical: $\sqrt{189}$ ; $\sqrt{240}$ ; $\sqrt{2^{11}}$ .

2. Introduceți factorii sub radical: $3\sqrt{21}$ ; $-4\sqrt{15}$ ; $2^5\sqrt{2}$.

## SĂ ÎNVĂȚĂM!

❖ Dacă $a > 0$ și $b \geq 0$, $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$.

❖ Spunem că am introdus un factor (număr pozitiv) sub radical, dacă factorul este „*mutat*” sub semnul radical și este ridicat la pătrat.

❖ Dacă $a < 0$ și $b \geq 0$, $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 \cdot b}$.

## EXERSĂM ÎMPREUNĂ

➢ Introduceți sub radical factorii din fața acestuia:

a. $a\sqrt{5}$; b. $-a\sqrt{8}$, $a < 0$.

*Rezolvare.*

a. Dacă $a \geq 0$, atunci $a\sqrt{5} = \sqrt{5a^2}$, iar dacă $a < 0$ avem $a\sqrt{5} = -\sqrt{5a^2}$.

b. Cum $a < 0$, avem $-a > 0$, deci $-a\sqrt{8} = \sqrt{8 \cdot (-a)^2} = \sqrt{8a^2}$.

➢ Are sens rădăcina pătrată din 0? Justificați!

## EXERSAȚI

**1.** Scoateți factori de sub radical:

a. $\sqrt{45}$; b. $\sqrt{18}$; c. $\sqrt{125}$; d. $\sqrt{80}$
e. $\sqrt{300}$; f. $\sqrt{450}$; g. $\sqrt{1008}$; h. $\sqrt{1350}$;
i. $\sqrt{294}$ ; j. $\sqrt{720}$ ; k. $\sqrt{810}$; l. $\sqrt{250}$
m. $\sqrt{2368}$ ; n. $\sqrt{3750}$ ; o. $\sqrt{1323}$ ; p. $\sqrt{2880}$;
q. $\sqrt{3072}$; r. $\sqrt{2268}$ .

**2.** Scoateți factori de sub radical, știind că $x \geq 0$, $y \geq 0$, $a \geq 0$ și $b \geq 0$:

a. $\sqrt{450a^7}$ ; b. $\sqrt{80x^6}$ ; c. $\sqrt{32x^2y^4}$; d. $\sqrt{25a^2b}$;
e. $\sqrt{72x^5y^3}$ ; f. $\sqrt{5x^6}$.

**3.** Introduceți factorii sub radical:

a. $5\sqrt{2}$; b. $3\sqrt{5}$; c. $2\sqrt{3}$; d. $4\sqrt{3}$;
e. $3\sqrt{3}$; f. $-2\sqrt{2}$; g. $12\sqrt{2}$; h. $-6\sqrt{7}$;
i. $-0,2\sqrt{3}$; j. $1,5\sqrt{2}$; k. $1,(3)\sqrt{21}$; l. $2^2\sqrt{7}$;
m. $-9^0\sqrt{23}$; n. $-16\sqrt{6}$ ; o. $1,4\sqrt{5}$ ; p. $3^2\sqrt{6}$;
r. $-2,(3)\sqrt{3}$ ; s. $-2,8\sqrt{125}$.

**4.** Introduceți factorii sub radical, știind că $x \geq 0, b \leq 0$:

a. $x \cdot b$ ; b. $x\sqrt{5}$; c. $x^2\sqrt{15}$; d. $5x\sqrt{3x}$;
e. $-2x^2\sqrt{5x}$ ; f. $17xb\sqrt{6b^2}$.

**5.** Asociați fiecărui caz enunțul potrivit, dintre următoarele: întotdeauna adevărat, uneori adevărat, niciodată adevărat.

a. $15\sqrt{2} = 5\sqrt{18}$; b. $\sqrt{252} = 6\sqrt{7}$ ;
c. $10\sqrt{3} = 2\sqrt{75}$; d. $-4\sqrt{5} = \sqrt{80}$;
e. $\sqrt{240x^4} = 4x^2\sqrt{15}$; f. $\sqrt{125x^2} = 5x\sqrt{5}$;
g. $-\sqrt{128} = -4\sqrt{6}$; h. $x\sqrt{162} = 9\sqrt{2x^2}$.

**6.** Calculați:

a. $\sqrt{25} - 3 \cdot \sqrt{16} + 2 \cdot \sqrt{64}$;
b. $\sqrt{9} - 2 \cdot \sqrt{4} + 3 \cdot \sqrt{36}$;
c. $\sqrt{49} - 4 \cdot \sqrt{4} + 3 \cdot \sqrt{64}$;
d. $\sqrt{225} - 2 \cdot (\sqrt{144} - \sqrt{100})$;
e. $\sqrt{121} - 3 \cdot (\sqrt{169} - \sqrt{81})$;
f. $\sqrt{196} - 4 \cdot (\sqrt{144} - \sqrt{121})$;
g. $\sqrt{169} - 2 \cdot (\sqrt{121} - \sqrt{100})$;
h. $\sqrt{16} - 3 \cdot \sqrt{25} + \sqrt{100}$.

**7.** Calculați:

a. $\sqrt{121} - 3 \cdot \sqrt{81} + 2 \cdot \sqrt{49}$;
b. $\sqrt{25} \cdot (\sqrt{64} - |\sqrt{4} - \sqrt{16}|) - \sqrt{121}$;
c. $\sqrt{9} \cdot (\sqrt{100} - |\sqrt{16} - \sqrt{25}|)$.